

ESERCITAZIONE N° 2

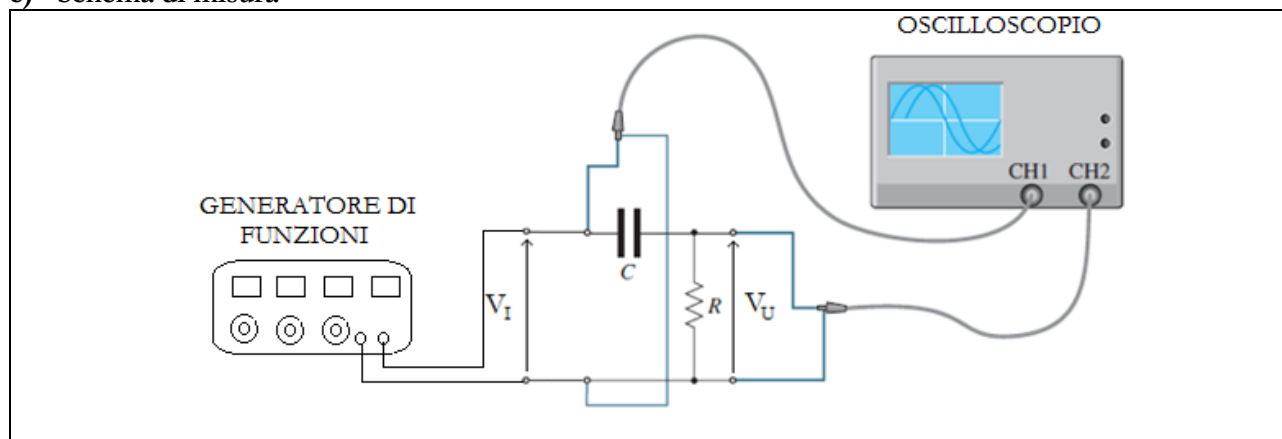
a) **Titolo dell'esercitazione:** Misura dello sfasamento tra le tensioni di uscita e di ingresso di un filtro RC.

b) **Dati relativi all'oggetto in prova**

Filtro RC passa alto costituito da

- N° 1 condensatore avente capacità $C = 10 \text{ nF}$;
- N° 1 resistore avente resistenza $R = 10 \text{ k}\Omega$

c) **Schema di misura**



d) **Dati relativi agli strumenti di misura utilizzati**

- N° 1 Bread board;
- N° 1 Oscilloscopio TEKTRONIX modello 2225;
- N° 1 Generatore di funzioni TEKTRONIX modello CFG250

e) **Registrazione risultati**

$$\omega_T = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^3} = 10 \text{ kHz}$$

f) **Cenni teorici:**

La **fase** o **sfasamento**, generalmente indicato con la lettera greca ϕ , è un parametro misurato in radianti che rappresenta la traslazione di una grandezza sinusoidale rispetto a un'altra.

Considerate due grandezze sinusoidali aventi la stessa frequenza (isofrequenziali), ad esempio due tensioni o una tensione e una corrente, per stabilire la fase tra di esse occorre anzitutto sceglierne arbitrariamente una come riferimento.

Solitamente in un circuito elettrico la grandezza di riferimento è quella applicata al suo ingresso, alla quale per convenzione viene attribuita una fase nulla ($\phi = 0$).

Per esempio, con riferimento alla figura 1 nella quale sono rappresentate due grandezze sinusoidali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sfasate di un angolo ϕ , supponendo di fissare $s_1(t)$ come riferimento di fase, cioè:

$$s_1(t) = A \sin(\omega t) \quad (1)$$

la seconda grandezza $s_2(t)$ viene così scritta:

$$s_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

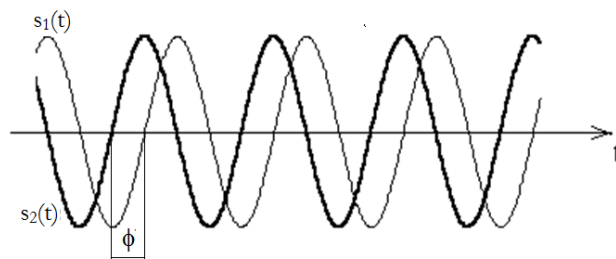


Figura 1 – Grandezze sinusoidali sfasate di un angolo ϕ

È possibile visualizzare geometricamente il concetto di sfasamento fra le due grandezze sinusoidali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ rappresentandole rispettivamente con due vettori S_1 e S_2 in rotazione con la stessa velocità angolare ω : la fase ϕ rappresenta l'angolo (costante) fra i due vettori.

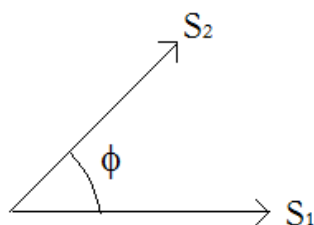


Figura 2 – Sfasamento tra i vettori S_1 e S_2

La fase fornisce una misura angolare della "distanza" fra due grandezze sinusoidali.

Tuttavia, in molti casi risulta utile trasformare tale misura angolare in un tempo. Ciò può essere fatto abbastanza semplicemente riscrivendo l'espressione analitica della generica sinusoide come di seguito riportato:

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega(t + \phi/\omega)) \quad (3)$$

Dalla (3) si evince facilmente che la traslazione in fase ϕ corrisponde a una traslazione nel tempo ϕ/ω .

Per esempio se due sinusoidi entrambe con pulsazione $\omega = 628 \text{ rad/s}$ (cioè un periodo $T = 2\pi/\omega = 10 \text{ ms}$) hanno una differenza di fase di $\phi = 0,5 \text{ rad}$, la loro distanza Δt sull'asse t risulta:

$$\Delta t = \phi/\omega = 0,5/628 = 0,8 \text{ ms}$$

In generale per ricavare la relazione fra fase e traslazione nel tempo basta scrivere la seguente proporzione (dove T è il periodo della grandezza sinusoidale):

$$\phi : 2\pi = \Delta t : T \quad (4)$$

da cui è possibile ricavare Δt noto ϕ o viceversa.

Filtro passa alto RC

Considerato il circuito riportato nello schema di misura, nell'ipotesi che il condensatore sia inizialmente scarico ($V_0 = 0$), applicando al suo ingresso una tensione sinusoidale V_i avente pulsazione ω , per la legge di Ohm la tensione di uscita V_u vale:

$$V_u = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} V_i \quad (5)$$

Di definisce **funzione di trasferimento** del circuito RC, e si indica con G , il rapporto tra la tensione V_u di uscita e la tensione V_i d'ingresso cioè:

$$G = \frac{V_u}{V_i} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}} \quad (6)$$

Il modulo e la fase di G valgono pertanto:

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \quad (7)$$

$$\angle G = \arctg \frac{1}{\omega RC} \quad (8)$$

Le equazioni (7) e (8) sono dette rispettivamente **risposta ampiezza-frequenza** e risposta **fase-frequenza** del circuito RC. Poiché risulta:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} = 1 \quad (9)$$

l'ampiezza della tensione d'uscita aumenta all'aumentare di ω fino ad assumere il valore della tensione di ingresso al tendere di ω all'infinito ($G = 1$).

Infatti, alle basse frequenze la reattanza capacitiva $\left(\frac{1}{\omega C}\right)$ assume valori molto elevati e quindi nel circuito circola una debole corrente: quasi tutta la tensione di ingresso è allora localizzata ai capi del condensatore.

All'aumentare della pulsazione la reattanza capacitiva diminuisce, la corrente nel circuito aumenta e quindi la maggior parte della tensione d'ingresso “cade” sulla resistenza R (per $\omega \rightarrow \infty$ la reattanza capacitiva diventa un cortocircuito e quindi tutta la tensione di ingresso “passa” in uscita).

Il circuito si comporta pertanto come filtro **passa alto**, che fa “passare” quasi tutta la tensione applicata all'ingresso alle alte frequenze mentre, man mano che la frequenza diminuisce, tende a decrementarne l'ampiezza fino ad annullarla (per $\omega=0$).

Il valore della pulsazione in corrispondenza della quale il modulo della funzione di trasferimento del filtro assume il 70,7% del valore della tensione d'ingresso è detto **pulsazione di taglio**, che si indica con ω_T .

Per determinare ω_T basta imporre (per la 9):

$$1 + \frac{1}{\omega_T^2 R^2 C^2} = 2 \quad (10)$$

dalla quale si ottiene:

$$\omega_T = \frac{1}{RC} \quad (11)$$

Considerando che $\omega = 2\pi f$, la corrispondente frequenza di taglio f_T vale:

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC} \quad (12)$$

In corrispondenza di ω_T la (D4.9) fornisce:

$$\angle A(j\omega) = \arctg \frac{1}{\frac{1}{RC} RC} = 45^\circ \quad (13)$$

Alla frequenza di taglio, pertanto, lo sfasamento tra ingresso e uscita è 45° , con l'uscita in anticipo.

Se nelle (7) e (8) si sostituisce la (11), si ottengono due espressioni universali, indipendenti dai valori dei componenti (R e C) e quindi valide per qualsiasi filtro passa alto RC; si ha infatti:

$$|A(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2}}} \quad \angle A(j\omega) = \arctg \frac{\omega_T}{\omega} \quad (14)$$

Riportando le (14) in un grafico cartesiano in funzione della pulsazione ω , si ottengono le curve di figura 3: si può osservare che la funzione $|G|$ (caratteristica ampiezza-frequenza), partendo dal valore 0, aumenta tendendo asintoticamente a 1, mentre la funzione $\angle G$ (caratteristica fase-frequenza), partendo dal valore 90° , decresce tendendo asintoticamente al valore 0° ; inoltre, in corrispondenza della pulsazione di taglio ω_T , l'attenuazione assume il valore 0,707, mentre la fase vale 45° .

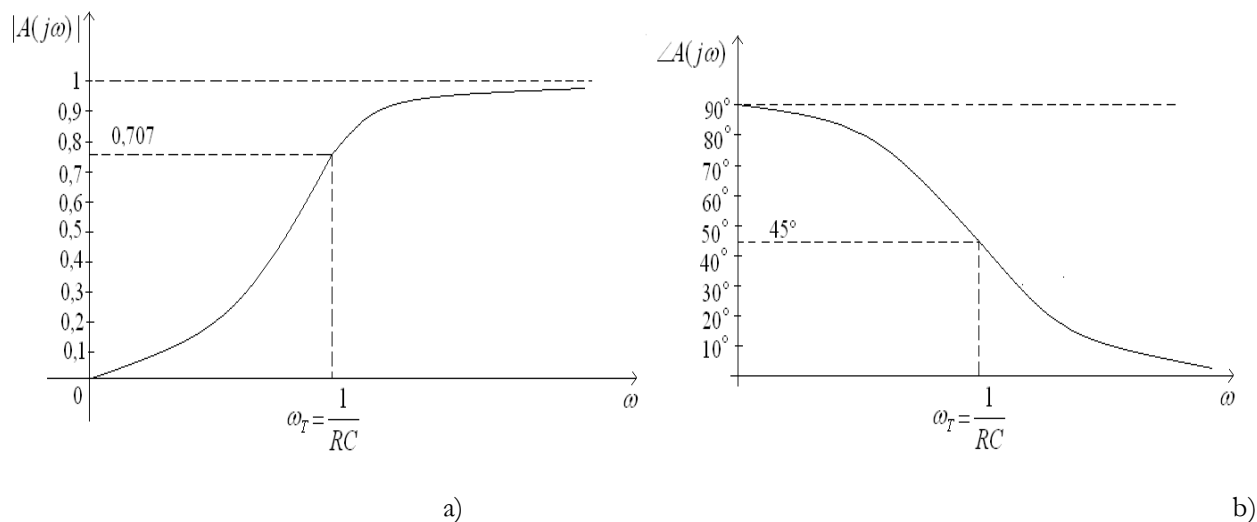


Figura 4 – a) Caratteristica ampiezza-frequenza di un filtro RC passa alto; b) Caratteristica fase-frequenza di un filtro RC passa alto

g) Relazione

Lo scopo della presente esercitazione è la verifica sperimentale dello sfasamento tra le tensioni di uscita e di ingresso del filtro passa alto RC riportato nello schema di misura.

Al riguardo viene utilizzato un oscilloscopio a doppia traccia sul quale vengono visualizzate le tensioni d'ingresso V_i e d'uscita V_u del filtro delle quali si vuole determinare lo sfasamento.

La tensione di ingresso V_i viene generata dal generatore di funzioni impostato in modalità sinusoidale, ed applicata all'ingresso del filtro RC tramite una sonda.

Prelevando le due tensioni V_i e V_u , ciascuna tramite una sonda, si inviano queste ultime ai canali CH1 e CH2 dell'oscilloscopio, sullo schermo del quale vengono visualizzate le relative tracce sovrapposte, come mostrato nella figura 5.

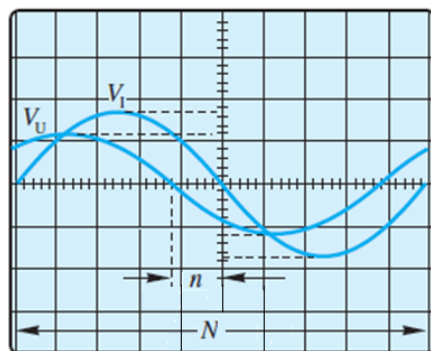


Figura 5 – Visualizzazione dei segnali sfasati

Si può osservare che il segnale di uscita, rispetto a quello d'ingresso, è sfasato in anticipo e attenuato.

Prima di iniziare la misura, tramite il posizionatore orizzontale dell'oscilloscopio è necessario centrare perfettamente le due tracce rispetto all'asse di riferimento orizzontale (asse dei tempi).

Indicando con n il numero delle divisioni comprese tra i punti di intersezione delle due tracce con l'asse orizzontale e con N il numero di divisioni corrispondenti a un periodo, poiché risulta:

$$360^\circ : N = \phi : n \quad (15)$$

in cui 360° è l'angolo corrispondente a un periodo e ϕ è l'angolo di fase corrispondente allo sfasamento tra i due segnali. Dalla (5) si può quindi ricavare:

$$\phi = \frac{360^\circ \cdot n}{N} \quad (16)$$

Che costituisce lo sfasamento in gradi tra la tensione di ingresso e quella di uscita del filtro passa alto.

Impostando la frequenza della tensione d'ingresso V_i pari al valore della frequenza di taglio f_T del filtro, lo sfasamento che si ottiene è $\phi = 45^\circ$.